

Nota equazioni goniometriche elementari

Liceo Assteas -Buccino-

F. Fernicola

13 Gennaio 2026

Esempio 1. Risolvere l'equazione goniometrica $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Soluzione

Ricordiamo che un angolo dove il seno vale $\frac{\sqrt{3}}{2}$ è $\alpha = \frac{\pi}{3}$ e quindi $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ e $x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ e quindi in definitiva le soluzioni sono:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Osservazione 1. Trovato un angolo α si scrivono le soluzioni $x = \alpha + 2k\pi \vee x = (\pi - \alpha) + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

Esempio 2. Risolvere l'equazione goniometrica $\sin x = -\frac{1}{2}$

Soluzione

Ricordiamo che un angolo dove il seno vale $\frac{1}{2}$ è $\alpha = -\frac{\pi}{6}$ e quindi $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ e $x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$ e quindi in definitiva le soluzioni sono:

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Osservazione 2. Ovviamente la scrittura delle soluzioni non è univoca, nel senso potremmo scrivere le soluzioni in modi differenti dipendente dalla scelta dell'angolo, ad esempio in riferimento alla precedente equazione si potrebbe optare per $\alpha = \frac{7}{6}\pi$ e quindi si avrebbe $x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$ e quindi $x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Addirittura qualcuno potrebbe scrivere come soluzioni $x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$. Non vi spaventate se non vi trovate visivamente con la scrittura delle soluzioni su un testo.

Esempio 3. Risolvere l'equazione goniometrica $\sin x = -\frac{1}{10}$

Soluzione

Ricordiamo che l'angolo dove il seno vale $-\frac{1}{10}$ evidentemente non è un angolo "noto". Noi sappiamo che esiste un unico angolo $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ con $\sin \alpha = -\frac{1}{10}$ e tale angolo è $\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{10}\right)$. Scriveremo le soluzioni: $x = \arcsin\left(-\frac{1}{10}\right) + 2k\pi$ e $x = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{10}\right) + 2k\pi$.

Osservazione 3. Facciamo notare che la funzione $f(x) = \arcsin x$ è una funzione dispari e questo vuol dire che $\arcsin(-x) = -\arcsin x$. Dunque le soluzioni precedenti si possono scrivere anche come $x = -\arcsin\left(\frac{1}{10}\right) + 2k\pi$ e $x = \pi + \arcsin\left(\frac{1}{10}\right) + 2k\pi$.

Esempio 4. Risolvere l'equazione goniometrica $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Soluzione

Ricordiamo che un angolo dove il coseno vale $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ è $\alpha = \frac{5}{6}\pi$ e quindi $x = \pm\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$.

Osservazione 4. Trovato un angolo α si scrivono le soluzioni $x = \pm\alpha + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Con il coseno possiamo adottare la strategia di scrivere le soluzioni "in blocco" che risulta anche poco dispendiosa. Attenzione che le soluzioni possono essere scritte anche in altro modo, ad esempio per l'equazione precedente potremmo scrivere $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Si potrebbe optare anche per la scelta $x = \pm\frac{7}{6}\pi + 2k\pi$, se riflettete anche quest'ultima va bene. Ricordate che le cose semplici sono anche le migliori e capirete nel tempo come agire a meno che non vengano poste delle condizioni che vi obbligano a fare scelte ben precise come riportate negli esempi successivi.

Esempio 5. Risolvere l'equazione goniometrica $\cos x = -\frac{1}{2}$ nell'intervallo $I = [0, 2\pi]$

Soluzione

In questo caso non abbiamo spazio di manovra, diremo $x = \frac{2}{3}\pi$ e $x = \frac{4}{3}\pi$. Non ci sta nessuno $2k\pi$ questa volta, ogni altra scrittura all'infuori di questo intervallo è abusiva!

Esempio 6. Risolvere l'equazione goniometrica $\cos x = -\frac{1}{2}$ nell'intervallo $I = [-\pi, \pi]$

Soluzione

In questo caso non abbiamo spazio di manovra, diremo $x = -\frac{2}{3}\pi$ e $x = \frac{2}{3}\pi$. Non ci sta nessuno $2k\pi$ questa volta, ogni altra scrittura all'infuori di questo intervallo è abusiva!

Esempio 7. Risolvere l'equazione goniometrica $\cos x = -\frac{4}{5}$

Soluzione

Ricordiamo che l'angolo dove il coseno vale $-\frac{4}{5}$ evidentemente non è un angolo "noto". Noi sappiamo che esiste un unico angolo $\alpha \in [0, \pi]$ con $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ e tale angolo è $\alpha = \arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$.

Scriveremo le soluzioni: $x = \pm \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) + 2k\pi$. Ovviamente sono possibili altre scelte e vi invito a riflettere sulle possibili scritture. Credo che immaginate che $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$ sia un angolo "prossimo a π " e quindi $\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$ sia quella parte di angolo che manca "per raggiungere π ". Con questa osservazione possiamo scrivere le soluzioni dell'equazione in alto come

$$x = \pi - \arccos\left(\frac{4}{5}\right) + 2k\pi \vee x = \pi + \arccos\left(\frac{4}{5}\right) + 2k\pi$$

Osservazione 5. Facciamo notare che la funzione $f(x) = \arccos x$ non è nè una funzione pari e nè una funzione dispari ma vale la seguente relazione (si dimostra):

$$\arccos(x) + \arccos(-x) = \pi \text{ con } x \in [-1, 1]$$

Esempio 8. Risolvere l'equazione goniometrica $\tan x = -\sqrt{3}$

Soluzione

Ricordiamo che un angolo dove la tangente vale $-\sqrt{3}$ è $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ e quindi $x = \frac{2}{3}\pi + k\pi$ sono le soluzioni dell'equazione assegnata.

Osservazione 6. Ovviamente la scrittura delle soluzioni non è univoca, nel senso potremmo scrivere le soluzioni in modi differenti dipendente dalla scelta dell'angolo, ad esempio in riferimento alla precedente equazione si potrebbe optare per $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ e quindi si avrebbe $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$. Addirittura qualcuno potrebbe scrivere come soluzioni $x = \frac{5}{3}\pi + k\pi$ oppure $x = -\frac{4}{3}\pi + k\pi$. Non vi spaventate se non vi trovate visivamente con la scrittura delle soluzioni su un testo. Il mio consiglio è scrivere la soluzione "più naturale", ad esempio nella precedente equazione personalmente opterei per $x = \frac{2}{3}\pi + k\pi$, le cose semplici sono le migliori a meno che davvero non ci siano richieste particolari di scrivere le soluzioni in opportuni intervalli fissati nella traccia.

Esempio 9. Risolvere l'equazione goniometrica $\tan x = -\frac{1}{4}$

Soluzione

Ricordiamo che l'angolo dove la tangente vale $-\frac{1}{4}$ evidentemente non è un angolo "noto". Noi sappiamo che esiste un unico angolo $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ con $\tan \alpha = -\frac{1}{4}$ e tale angolo è $\alpha = \arctan\left(-\frac{1}{4}\right)$. Scriveremo le soluzioni: $x = \arctan\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi$.

Osservazione 7. Facciamo notare che la funzione $f(x) = \arctan x$ è una funzione dispari e questo vuol dire che $\arctan(-x) = -\arctan x$. Dunque le soluzioni precedenti si possono scrivere anche come $x = -\arctan\left(\frac{1}{4}\right) + k\pi$.

Esercizio 1. Risolvere le seguenti equazioni goniometriche elementari:

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\sin x = 1$

c) $\sin x = -\frac{1}{3}$

d) $\cos x = -\frac{1}{2}$

e) $\cos x = -1$

f) $\cos x = \frac{1}{6}$

g) $\tan x = \sqrt{3}$

h) $\tan x = 0$

i) $\tan x = -2$