Alcune formule di goniometria

Liceo Assteas -Buccino-

F. Fernicola 3 Febbraio 2025

Si chiama *circonferenza goniometrica*, una circonferenza con centro nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano e raggio *unitario*. Facciamo un disegno per maggior chiarezza.

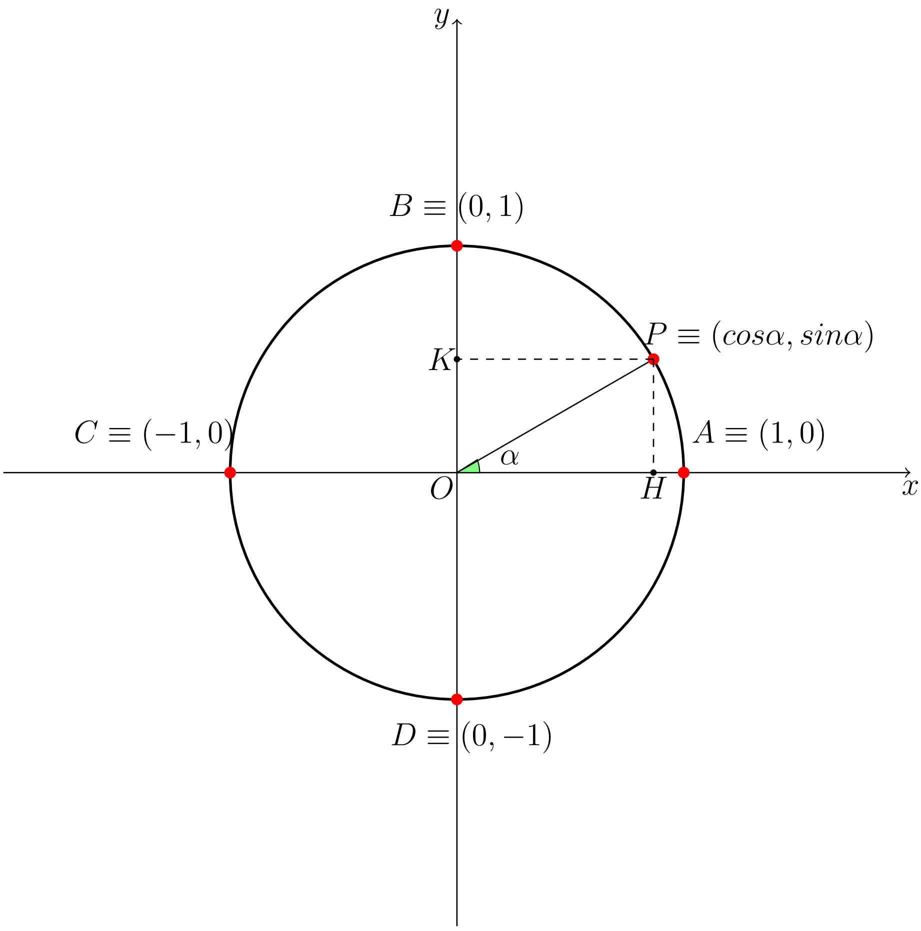

Figura 1: Circonferenza goniometrica

La prima relazione che scriviamo è quella fondamentale:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \tag{1}$$

$$\sin \alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \qquad \cos \alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \tag{2}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \qquad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \tag{3}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \qquad \csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \tag{4}$$

Partendo da $\sin^2 \alpha = \dfrac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}$ e $\cos^2 \alpha = \dfrac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^\alpha}$

$$\sin \alpha = \pm\frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \qquad \cos \alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \tag{5}$$

Formule di addizione e sottrazione

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \tag{6}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{7}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \tag{8}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \tag{9}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta} \tag{10}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta} \tag{11}$$

$$\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot\alpha \cdot \cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha} \tag{12}$$

$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot\alpha \cdot \cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta} \tag{13}$$

Formule di duplicazione

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \tag{14}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \tag{15}$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} \tag{16}$$

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha} \tag{17}$$

Formule di bisezione Partendo da $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ si possono scrivere:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \tag{18}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} \tag{19}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} \tag{20}$$

$$\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} \tag{21}$$

Formule parametriche Poniamo $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = t$

Sappiamo che $\frac{2sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \sin(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

Sappiamo che $\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \cos(2\alpha) = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{1-\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

Dunque $sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$ e $cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ e $tan\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$

Formule di prostaferesi

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \tag{22}$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2} \tag{23}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \tag{24}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \tag{25}$$

Formule di Werner

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)] \tag{26}$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)] \tag{27}$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)] \tag{28}$$