

Nota sulle disequazioni esponenziali e logaritmiche

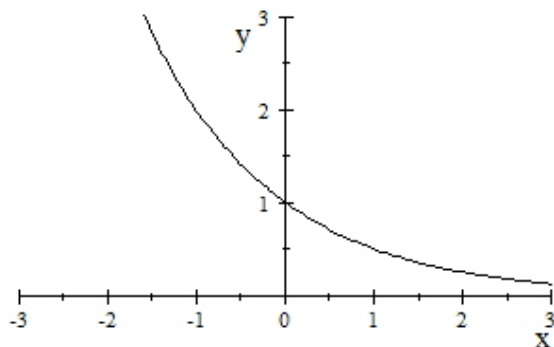
Disequazioni esponenziali

Osserviamo che se $a > 0$ e $a \neq 1$ possiamo considerare la seguente funzione:

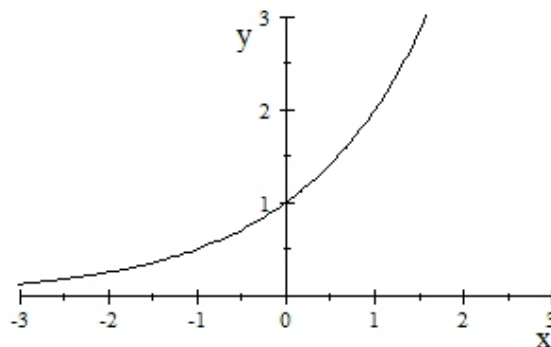
$$f(x) = a^x$$

Distinguiamo i seguenti casi:

• 1^o caso $0 < a < 1$



2^o caso $a > 1$



Una disequazione esponenziale è un'espressione del tipo:

$$(1) \quad a^{A(x)} \geq b$$

oppure

$$(2) \quad a^{A(x)} \leq b$$

Vediamo come si risolve la (1): $a^{A(x)} \geq b$;

Distinguiamo i seguenti casi:

• 1^o caso $0 < a < 1$

2^o caso $a > 1$

$$a^{A(x)} \geq b \iff A(x) \leq \log_a b$$

$$a^{A(x)} \geq b \iff A(x) \geq \log_a b$$

Example 1 Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali:

• $(\frac{1}{2})^{(x+1)} \geq 2$

$$x + 1 \leq \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1 \iff x \leq -2$$

- $2^{(x^2+1)} \geq 4 \iff x^2 + 1 \geq \log_2 4 = 2 \iff x^2 - 1 \geq 0 \iff x \leq -1 \text{ e } x \geq 1$

Exercise 0.1 Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali:

- $2^{(x^2-3x+4)} \geq 1$
- $3^{\frac{x-1}{x+1}} > 9$
- $(\frac{1}{2})^{(x^2-3)} > 2$
- $(\frac{1}{3})^{(x^2-4)} \geq 9$

Vediamo come si risolve la (2): $a^{A(x)} \leq b$;

Distinguiamo i seguenti casi:

- $1^0 \text{ caso} \quad 0 < a < 1 \qquad \qquad \qquad 2^0 \text{ caso} \quad a > 1$

$$a^{A(x)} \leq b \iff A(x) \geq \log_a b \qquad \qquad \qquad a^{A(x)} \leq b \iff A(x) \leq \log_a b$$

Example 2 Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali:

- $(\frac{1}{2})^{(x+1)} \leq 1$

$$x + 1 \leq \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0 \iff x \leq -1$$

- $2^{(x^2+1)} \leq 2 \iff x^2 + 1 \leq \log_2 2 = 1 \iff x^2 \leq 0 \iff \text{sempre}$

Exercise 0.2 Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali:

- $2^{(x^2-3x+4)} \leq 1$
- $3^{\frac{x-1}{x+1}} < 3$
- $(\frac{1}{2})^{(x^2-3)} < 4$
- $(\frac{1}{3})^{(x^2-4)} \leq 3$

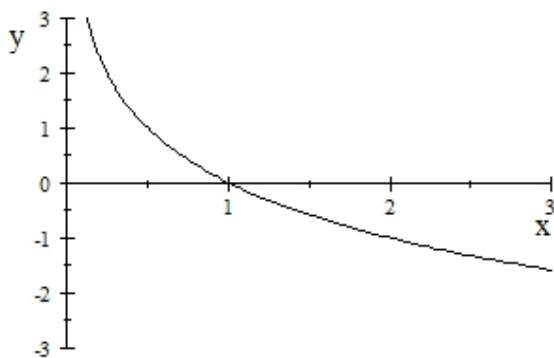
Disequazioni logaritmiche

Osserviamo che se $a > 0$ e $a \neq 1$ possiamo considerare la seguente funzione:

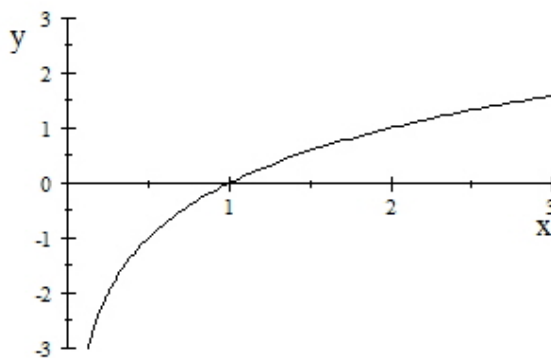
$$f(x) = \log_a x$$

Distinguiamo i seguenti casi:

• 1^o caso $0 < a < 1$



2^o caso $a > 1$



Una disequazione logaritmica è un'espressione del tipo:

$$(1) \quad \log_a A(x) \geq b$$

oppure

$$(2) \quad \log_a A(x) \leq b$$

Vediamo come si risolve la (1): $\log_a A(x) \geq b$;

Distinguiamo i seguenti casi:

• 1^o caso $0 < a < 1$

2^o caso $a > 1$

$$\log_a A(x) \geq b \iff \begin{cases} A(x) > 0 \\ A(x) \leq a^b \end{cases}$$

$$\log_a A(x) \geq b \iff A(x) \geq a^b$$

Example 3 Risolvere le seguenti disequazioni logaritmiche:

• $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) \geq -1$

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x^2 - 1 \leq 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x < -1 \text{ e } x > 1 \\ -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \end{cases} \iff -\sqrt{3} \leq x < -1 \text{ e } 1 < x \leq \sqrt{3}$$

• $\log_2(x^2 + 1) \geq 3$

$$x^2 + 1 \geq 8 \iff x^2 - 7 \geq 0 \iff x \leq -\sqrt{7} \text{ e } x \geq \sqrt{7}$$

Exercise 0.3 *Risolvere le seguenti disequazioni logaritmiche:*

- $\log_2(x^2 - 3x + 4) \geq 1$
- $\log_{10} \frac{x-1}{x+1} > 1$
- $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3) > 0$
- $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4) \geq -1$

Vediamo come si risolve la (2): $\log_a A(x) \leq b$;
Distinguiamo i seguenti casi:

- $1^0 \text{ caso} \quad 0 < a < 1$
- $2^0 \text{ caso} \quad a > 1$

$$\log_a A(x) \leq b \iff A(x) \geq a^b \qquad \log_a A(x) \leq b \iff \begin{cases} A(x) > 0 \\ A(x) \leq a^b \end{cases}$$

Example 4 *Risolvere le seguenti disequazioni logaritmiche:*

- $\log_{\frac{1}{2}}(x - 1) \leq -1$

$$x - 1 \geq 2 \iff x \geq 3$$

- $\log_2(x^2 + 1) \leq 1$

$$\begin{cases} x^2 + 1 > 0 \\ x^2 + 1 \leq 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \forall x \in R \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \iff -1 \leq x \leq 1$$

Exercise 0.4 *Risolvere le seguenti disequazioni logaritmiche:*

- $\log_2(x^2 - 3x - 6) \leq 1$
- $\log_{10} \frac{x+1}{x-1} < 1$
- $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 8) < 0$
- $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 1) \leq -1$

Alcune proprietà sui logaritmi

$\log_3 9 = 2$, perchè $3^2 = 9$; $\log_3 3 = 1$, perchè $3^1 = 3$; $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$, perchè $(\frac{1}{3})^{-2} = 9$;

$$\log_{\frac{9}{4}} \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}, \text{ perchè } (\frac{9}{4})^{-\frac{1}{2}} = (\frac{4}{9})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

Per il calcolo dei logaritmi possono essere utili le seguenti proprietà:

- $\log_a b = -\log_a \frac{1}{b}$ $\log_2 4 = -\log_2 \frac{1}{4}$
- $\log_a b = -\log_{\frac{1}{a}} b$ $\log_3 9 = -\log_{\frac{1}{3}} 9$
- $\log_a b = \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b}$ $\log_4 16 = \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{16}$
- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ $\log_2 4 = \frac{1}{\log_4 2}$
- $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ $\log_2 (2 \cdot 4) = \log_2 2 + \log_2 4 = 1 + 2 = 3$
- $\log_a (\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$ $\log_3 \frac{27}{3} = \log_3 27 - \log_3 3 = 3 - 1 = 2$
- $\log_a x^n = n \log_a x$ $\log_2 4^2 = 2 \log_2 4 = 2 \cdot 2 = 4$

Exercise 0.5 Calcolare i seguenti logaritmi:

$$\log_2 4; \quad \log_3 81; \quad \log_{\frac{1}{2}} 16; \quad \log_3 \frac{1}{9}; \quad \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125}; \quad \log_{\frac{1}{3}} 81; \quad \log_{\frac{2}{3}} \frac{27}{8}$$

Exercise 0.6 Determinare il dominio delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1)}; & f(x) &= 2^{\sqrt{x-1}}; & f(x) &= 3^{\log_2(x^2-x)}; \\ f(x) &= \sqrt{\log_{10}(x^2 - 8x + 8)}; & f(x) &= \sqrt{e^x + 1}; & f(x) &= e^x + e^{-x}; & f(x) &= \frac{1}{e^x}; \\ f(x) &= \log(3^x + 5); & f(x) &= \sqrt{\log(x+1) - 2}; \end{aligned}$$