

Formule sulle funzioni goniometriche inverse

Liceo Assteas -Buccino-

F. FERNICOLA

12 Dicembre 2025

In questa nota vediamo di scrivere alcune formule che valgono nel caso siano coinvolte alcune funzioni inverse delle funzioni goniometriche.

- a) Sappiamo che $f(x) = \sin x$ è una funzione invertibile nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e la funzione inversa è $f^{-1}(x) = \arcsin x$ e in conclusione sappiamo:

$$f : x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \sin x \in [-1, 1]$$

$$f^{-1} : x \in [-1, 1] \longrightarrow \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Da quanto appena detto possiamo concludere:

$$\sin(\arcsin x) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$$

$$\arcsin(\sin x) = x \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

- b) Sappiamo che $f(x) = \cos x$ è una funzione invertibile nell'intervallo $[0, \pi]$ e la funzione inversa è $f^{-1}(x) = \arccos x$ e in conclusione sappiamo:

$$f : x \in [0, \pi] \longrightarrow \cos x \in [-1, 1]$$

$$f^{-1} : x \in [-1, 1] \longrightarrow \arccos x \in [0, \pi]$$

Da quanto appena detto possiamo concludere:

$$\cos(\arccos x) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$$

$$\arccos(\cos x) = x \quad \forall x \in [0, \pi]$$

- c) Sappiamo che $f(x) = \tan x$ è una funzione invertibile nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e la funzione inversa è $f^{-1}(x) = \arctan x$ e in conclusione sappiamo:

$$f : x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \tan x \in \mathbb{R}$$

$$f^{-1} : x \in \mathbb{R} \longrightarrow \arctan x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Da quanto appena detto possiamo concludere:

$$\tan(\arctan x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\arctan(\tan x) = x \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

- d) Se $x \in [-1, 1]$, allora ha senso calcolare $\alpha = \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e anche evidente che $\cos \alpha \geq 0$ perchè $\alpha = \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Sappiamo che $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$. Ricordiamo anche che $\sin(\arcsin x) = x$ e questo $\forall x \in [-1, 1]$. Ora da $\cos(\alpha) = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ e $\alpha = \arcsin x$ possiamo scrivere:

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \forall x \in [-1, 1]$$

- e) Se $x \in [-1, 1]$, allora ha senso calcolare $\alpha = \arccos x \in [0, \pi]$ e anche evidente che $\sin \alpha \geq 0$ perchè $\alpha = \arccos x \in [0, \pi]$. Sappiamo che $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$. Ricordiamo anche che $\cos(\arccos x) = x$ e questo $\forall x \in [-1, 1]$. Ora da $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ e $\alpha = \arccos x$ possiamo scrivere:

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \forall x \in [-1, 1]$$

- f) Se $x \in \mathbb{R}$, allora ha senso calcolare $\alpha = \arctan x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e anche evidente che $\cos \alpha \geq 0$ perchè $\alpha = \arctan x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Sappiamo che $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$. Ricordiamo anche che $\tan(\arctan x) = x$ e questo $\forall x \in \mathbb{R}$. Ora da $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$ e $\alpha = \arctan x$ possiamo scrivere:

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- g) Se $x \in \mathbb{R}$, allora ha senso calcolare $\alpha = \arctan x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e anche evidente che $\sin \alpha$ e $\tan \alpha$ conservano lo stesso segno nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e sappiamo che vale la relazione $\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$. Ricordiamo anche che $\tan(\arctan x) = x$ e questo $\forall x \in \mathbb{R}$. Ora da $\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$ e $\alpha = \arctan x$ possiamo scrivere:

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- h) Sappiamo che vale la relazione $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, allora $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ e quindi $\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \implies \tan \alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$.

Se $x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$, allora ha senso calcolare $\alpha = \arccos x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ e sappiamo che $\cos \alpha = x$, dunque possiamo scrivere:

$$\tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} \quad \forall x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$$

- i) Sappiamo che vale la relazione $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, allora $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ e quindi $\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \implies \tan \alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$.

Se $x \in (-1, 1)$, allora ha senso calcolare $\alpha = \arcsin x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e sappiamo che $\cos \alpha = \sqrt{1 - x^2}$, dunque possiamo scrivere:

$$\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \forall x \in (-1, 1)$$