Traslazioni, simmetrie centrali e simmetrie assiali

Liceo Wiligelmo -Modena-

17 Dicembre 2021

Noi sappiamo che un piano cartesiano è identificabile con $\mathbb{R}^2$, infatti un qualunque punto P del piano cartesiano è individuato da una coppia ordinata (x, y) di numeri reali. In questa nota vogliamo prendere in considerazione alcune *trasformazioni nel piano cartesiano*, con questa locuzione intendiamo studiare le funzioni $f : \mathbb{R}^2 \underset{(x,y)\mapsto(x',y')}{\longrightarrow} \mathbb{R}^2$ che rispettano certi criteri che di in volta definiremo.

Dunque ad un punto $P \equiv (x, y)$ del piano cartesiano vogliamo associare un altro punto $P' \equiv (x', y')$ secondo regole stabilite. In questa nota prenderemo in considerazione le seguenti trasformazioni del piano:

1) Traslazioni

2) Simmetrie centrali

3) Simmetrie assiali

1) Traslazioni

Un vettore $\overrightarrow{v}$ del piano è individuato dalle sue componenti (a, b), tali numeri rappresentano la misura con segno delle proiezioni del vettore lungo gli assi cartesiani. Osserviamo esplicitamente che la componente riferita all'asse è positiva se ha lo stesso verso dell'asse cartesiano e negativa in caso contrario. Le formule della traslazione sono date dalla seguente relazione:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \qquad \text{(Formule della Traslazione)}$$

Esempio 1 *Nel piano cartesiano le coordinate del punto sono $P \equiv (-3, 1)$ e il vettore ha componenti $\overrightarrow{v} = (2, -3)$. Quali sono le coordinate del punto P' trasformato di P mediante la traslazione $\overrightarrow{v}$?. E' sufficiente applicare le relazioni precedenti e troviamo che $P' \equiv (-1, -2)$.*

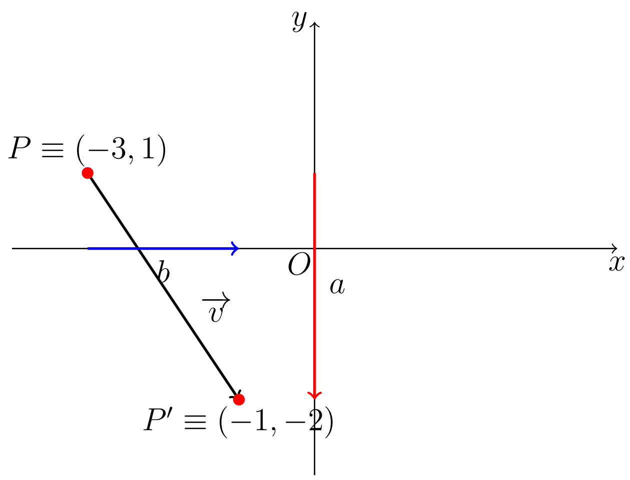

Figura 1: Traslazione mediante $\vec{v} = (-3, 2)$

2) Simmetria centrale

Per costruire questa trasformazione del piano si inizia con il fissare un punto $C \equiv (a, b)$ che chiameremo il centro della simmetria. La trasformazione è molto semplice, si considera il punto $P \equiv (x, y)$ e si deve far corrispondere ad esso il punto $P' \equiv (x', y')$ in modo tale che $C \equiv (a, b)$ sia il punto medio del segmento PP'. Le formule di trasformazione si costruiscono facilmente. I punti $C \equiv (a, b)$ e $P \equiv (x, y)$ sono assegnati, noi dobbiamo determinare $P' \equiv (x', y')$ in modo tale che valgano le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \dfrac{x + x'}{2} = a \\ \dfrac{y + y'}{2} = b \end{cases}$$

Dalle precedenti relazioni mediante semplici calcoli si trova:

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases} \qquad \text{(Formule della Simmetria Centrale)}$$

Esempio 2 *Nel piano cartesiano le coordinate del punto sono $P \equiv (-1, 3)$ e il Centro della Simmetria è $C \equiv (2, 1)$. Determinare le coordinate del punto P' simmetrico di P rispetto a C.*

In questo caso è sufficiente applicare le relazioni precedenti e quindi:

$$\begin{cases} x' = 2 \cdot 2 - (-1) = 4 + 1 = 5 \\ y' = 2 \cdot 1 - 3 = 2 - 3 = -1 \end{cases}$$

Il trasformato avrà coordinate $P' \equiv (5, -1)$.

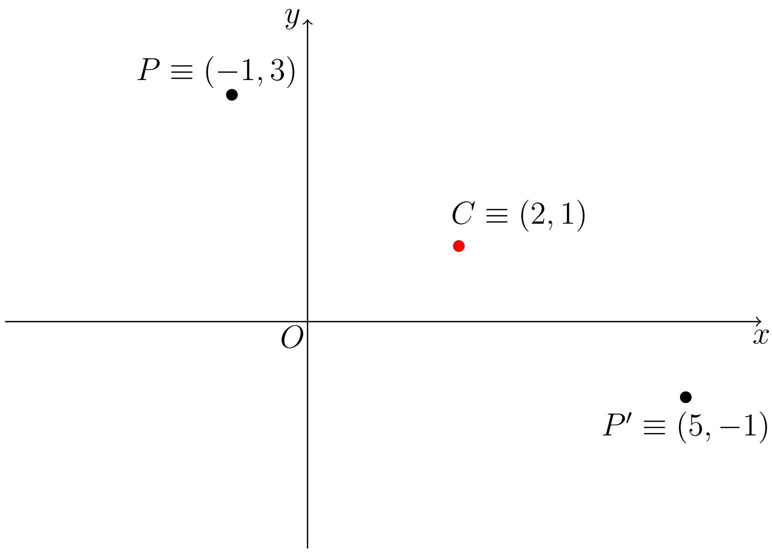

Figura 2: Simmetria di centro $C \equiv (2, 1)$

3) Simmetria assiale

Per costruire questa trasformazione del piano si inizia con il fissare una retta r del piano che chiameremo *l'asse della simmetria*. La trasformazione è molto semplice, si considera il punto $P \equiv (x, y)$ e si deve far corrispondere ad esso il punto $P' \equiv (x', y')$ che deve soddisfare a due condizioni:

A) Il punto medio del segmento PP' deve appartenere ad r.

B) La direzione del $\overrightarrow{PP'}$ deve essere ortogonale ad r.

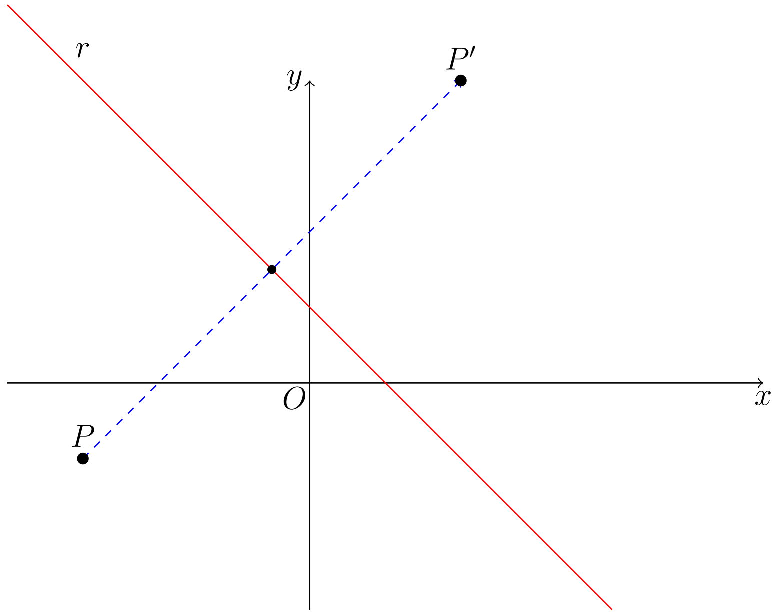

Figura 3: Simmetria assiale mediante r

Per costruire le formule della trasformazione, nulla di complicato, bisogna avere un minimo di pazienza perchè bisogna risolvere un sistema lineare. Intanto iniziamo col dire che la retta r ha equazione $r: ax + by + c = 0$, questa è assegnata perchè mediante tale asse costruiamo la trasformazione. Assegnato anche il punto $P \equiv (x, y)$ ci chiediamo come si determina il punto $P' \equiv (x', y')$, dobbiamo senza dubbio imporre le due condizioni A) e B) che abbiamo messo in evidenza in precedenza:

A) Le coordinate del punto medio del segmento PP' sono $H \equiv \left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$, vogliamo che tale punto sia un punto della retta r e quindi deve accadere che il punto $H \in r$ e quindi le coordinate devono verificare l'equazione della retta $r: ax + by + c = 0$:

$a\left(\frac{x+x'}{2}\right) + b\left(\frac{y+y'}{2}\right) + c = 0$ (PRIMA CONDIZIONE).

B) La direzione della retta r è data dal suo coefficiente angolare $-\frac{a}{b}$. La direzione del vettore $\overrightarrow{PP'}$ è data dalla relazione $\frac{y'-y}{x'-x}$ (ricordate come si calcola il coefficiente angolare per due punti!!!!). Non resta che imporre la condizione di ortogonalità:

$\frac{y'-y}{x'-x} = \frac{b}{a}$ (SECONDA CONDIZIONE).

Con le due precedenti condizioni bisogna impostare il sistema e risolverlo:

$$\begin{cases} a\left(\dfrac{x+x'}{2}\right) + b\left(\dfrac{y+y'}{2}\right) + c = 0 \\ \\ \dfrac{y'-y}{x'-x} = \dfrac{b}{a} \end{cases}$$

Ora vi ricordo che a, b, c, x, y sono noti, le incognite sono x', y'. Cerchiamo di armarci di tanta pazienza e facciamo questi calcoli, coraggio!!!

$$\begin{cases} ax + ax' + by + by' + 2c = 0 \\ ay' - ay = bx' - bx \end{cases}$$

Il sistema lineare scritto nel seguente modo:

$$\begin{cases} ax' + by' = -ax - by - 2c \\ -bx' + ay' = -bx + ay \end{cases}$$

è in forma normale, applichiamo Cramer:

La matrice dei coefficienti è $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ e notiamo che $det(M) = a^2 + b^2 \neq 0$ in quanto la retta r è non degenere! Applichiamo la regola di Cramer:

$$x' = \frac{\begin{vmatrix} -ax - by - 2c & b \\ -bx + ay & a \end{vmatrix}}{a^2 + b^2} \qquad y' = \frac{\begin{vmatrix} a & -ax - by - 2c \\ -b & -bx + ay \end{vmatrix}}{a^2 + b^2}$$

$$x' = \frac{-a^2x - aby - 2ac + b^2x - aby}{a^2 + b^2} \qquad y' = \frac{-abx + a^2y - abx - b^2y - 2bc}{a^2 + b^2}$$

$$x' = \frac{(-a^2 + b^2)x - 2aby - 2ac}{a^2 + b^2} \qquad y' = \frac{(a^2 - b^2)y - 2abx - 2bc}{a^2 + b^2}$$

Possiamo incorniciarle nel seguente modo:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{(-a^2 + b^2)x - 2aby - 2ac}{a^2 + b^2} \\ \\ y' = \dfrac{(a^2 - b^2)y - 2abx - 2bc}{a^2 + b^2} \end{cases} \qquad \text{(Formule della Simmetria Assiale)}$$

Per verificare la bontà delle relazioni scritte vediamo di testarle in un caso che per noi è prevedibile la risposta. Se uno ci dicesse qual e' il simmetrico del punto $P \equiv (-3, 3)$ rispetto alla bisettrice del $I - III$ quadrante che ha equazione $x - y = 0$, noi senza pensarci più di tanto diremmo il punto $P' \equiv (3, -3)$. Vediamo se le formule trovate confermano quanto da noi affermato.

Sappiamo che $a = 1, b = -1, c = 0, x = 3, y = -3$, non dobbiamo fare altro che mettere questi numeri nella "formulette di prima":

$$\begin{cases} x' = \dfrac{(-1 + 1)(3) - 2(1)(-1)(3) - 2(1)(0)}{1 + 1} = \dfrac{0 + 6 - 0}{2} = 3 \\ \\ y' = \dfrac{(1 - 1)(-3) - 2(1)(-1)(-3) - 2(1)(0)}{1 + 1} = \dfrac{0 - 6 - 0}{2} = -3 \end{cases}$$

Comi si può ben notare le cose tornano, ma le formule precedenti risultano più efficaci quando la retta non è per nulla particolare.

Esempio 3 *Determinare il punto $P' \equiv (x', y')$ simmetrico del punto $P \equiv (-5, 2)$ rispetto alla retta $r : 3x + y - 2 = 0$.*

Sappiamo che $a = 3, b = 1, c = -2, x = -5, y = 2$, non dobbiamo fare altro che mettere questi numeri nella "formulette di prima":

$$\begin{cases} x' = \dfrac{(-9+1)(-5) - 2(3)(2) - 2(3)(-2)}{9+1} = \dfrac{40 - 12 + 12}{10} = 4 \\ \\ y' = \dfrac{(9-1)(2) - 2(3)(-5) - 2(1)(-2)}{9+1} = \dfrac{16 + 30 + 4}{10} = 5 \end{cases}$$

Concludiamo che il punto simmetrico di $P \equiv (-5, 2)$ rispetto alla retta $r : 3x + y - 2 = 0$ è il punto $P' \equiv (4, 5)$.

Vogliamo fare un'ultima considerazione prima di chiudere questo paragrafo. Le formule della trasformazione assiale sono state scritte prendendo in considerazione una retta scritta in forma implicita e hanno il difetto di contenere molti parametri al suo interno, spesso la retta viene scritta in forma esplicita e quindi $y = mx + q$. Possiamo riscrivere le relazioni precedenti adattandole ad una forma esplicita, per fare questo dobbiamo tenere conto delle seguenti relazioni:

$$m = -\frac{a}{b} \quad \text{e} \qquad q = -\frac{c}{b}$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{(-a^2 + b^2)x - 2aby - 2ac}{a^2 + b^2} \\ \\ y' = \dfrac{(a^2 - b^2)y - 2abx - 2bc}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

Supposto $b \neq 0$, dividiamo tutti i termini (numeratore e denominatore per b^2), otteniamo:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\left(-\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{b^2}\right)x - \dfrac{2aby}{b^2} - \dfrac{2ac}{b^2}}{\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{b^2}} = \dfrac{(-m^2 + 1)x + 2my - 2mq}{m^2 + 1} \\ \\ y' = \dfrac{\left(\dfrac{a^2}{b^2} - \dfrac{b^2}{b^2}\right)y - \dfrac{2abx}{b^2} - \dfrac{2bc}{b^2}}{\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{b^2}} = \dfrac{(m^2 - 1)y + 2mx + 2q}{m^2 + 1} \end{cases}$$

In forma compatta possiamo scrivere:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-m^2 + 1}{m^2 + 1}x + \dfrac{2m}{m^2 + 1}y - \dfrac{2mq}{m^2 + 1} \\ \\ y' = \dfrac{m^2 - 1}{m^2 + 1}y + \dfrac{2m}{m^2 + 1}x + \dfrac{2q}{m^2 + 1} \end{cases} \qquad \text{(Formule della Simmetria Assiale)}$$

Esercizio 1 *Nel piano cartesiano le coordinate del punto sono* $P \equiv (4, -3)$ *e il vettore ha componenti* $\overrightarrow{v} = (5, -2)$. *Quali sono le coordinate del punto* P' *trasformato di* P *mediante la traslazione* $\overrightarrow{v}$*?.*

Esercizio 2 *Nel piano cartesiano le coordinate del punto sono* $P \equiv (4, -5)$ *e il Centro della Simmetria è* $C \equiv (-3, 2)$. *Determinare le coordinate del punto* P' *simmetrico di* P *rispetto a* C.

Esercizio 3 *Determinare il punto* $P' \equiv (x', y')$ *simmetrico del punto* $P \equiv (2, -5)$ *rispetto alla retta* $r : y = 4x - 1$.