

# Retta tangente ad un punto di una parabola

Istituto "Assteas"-Buccino-

F. Fernicola

24 Novembre 2025

## Premessa

Se  $ax^2 + bx + c = 0$  è un'equazione di secondo grado con  $\Delta \geq 0$  sappiamo che essa ammette radici reali date dalla seguente relazione:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} \quad (\text{Formula Risolutiva})$$

Ora proviamo a sommare le due radici  $x_1$  e  $x_2$ , otteniamo:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a} \implies x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Ora proviamo a moltiplicare le due radici  $x_1$  e  $x_2$ , otteniamo:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2a} = \frac{c}{a} \implies x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

In conclusione possiamo dire che se  $\Delta \geq 0$ , allora:

a)  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

b)  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

A noi servirà la prima delle relazioni!! Faccio una piccola digressione, sono cose interessanti perché se qualcuno mi chiede quanto fa la somma delle radici dell'equazione  $3x^2 + 2x - 3 = 0$  io dico in un secondo che la somma delle radici è  $s = -\frac{2}{3}$  senza calcolare le radici. Potete provare che sono stato veggente!!! Se qualcuno mi chiede quanto fa il prodotto delle radici dell'equazione  $7x^2 - 10x + 3 = 0$  io dico in un secondo che il prodotto delle radici è  $p = \frac{3}{7}$  senza calcolare le radici. Potete provare che sono stato un mago!!!

## Retta tangente ad un punto di una parabola

Rispondiamo al problema posto, noi ci troviamo in questa configurazione:

L'equazione della parabola  $\gamma : y = ax^2 + bx + c$ , il punto  $P \equiv (x_0, y_0)$  che appartiene alla parabola e chiediamo che la retta del fascio  $r : y - y_0 = m(x - x_0)$  abbia in comune con la parabola  $\gamma$  solo il punto  $P \equiv (x_0, y_0)$ . Costruiamo un sistema con la parabola e la retta del fascio:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y - y_0 = m(x - x_0) \end{cases} \implies \begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx - mx_0 + y_0 \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c = mx - mx_0 + y_0 \implies ax^2 + (b - m)x + mx_0 - y_0 + c = 0$$

L'ultima equazione che ho scritto è di secondo grado in  $x$  e poichè la retta deve essere tangente deve avere solo un punto di contatto e quindi le soluzioni devono essere  $x_1 = x_0$  e  $x_2 = x_0$  (Osserviamo che il punto  $P \equiv (x_0, y_0)$  appartiene alla retta e alla parabola e ci deve essere solo quello!!). Dunque possiamo dire che

$x_1 + x_2 = 2x_0$  ma guardando l'equazione in alto a destra sappiamo che  $x_1 + x_2 = -\frac{b - m}{a}$ , allora abbiamo la seguente relazione:

$$-\frac{b - m}{a} = 2x_0 \implies -b + m = 2ax_0 \text{ e quindi } m = 2ax_0 + b.$$

Questo ragionamento giustifica da dove nasce la formula  $y - y_0 = (2ax_0 + b)(x - x_0)$  della retta tangente alla parabola di equazione  $y = ax^2 + bx + c$  nel suo punto  $P \equiv (x_0, y_0)$ .