

Nota sulla parabola

Liceo Assteas -Buccino-

F. Fernicola

8 Novembre 2025

Cambiamento del riferimento: "Traslazione degli assi"

Spesso accade che stiamo utilizzando un sistema di riferimento che indicheremo con $S = (O; x, y)$ e per convenienza ci serve introdurre un nuovo sistema di riferimento che possiamo indicare con $S' = (O', X, Y)$. Molte cose che noi conosciamo in S per gusto le vorremmo trasportare con l'astronave di Star Trek nel "Mondo Parallelo" S' .

Ho le coordinate di P in S , quali saranno le coordinate di P nel nuovo riferimento S' ?

Ho l'equazione di una retta r , quale sarà l'equazione della retta r in S' ?

Ci piacerebbe dunque capire come dobbiamo tradurre in S' i risultati che conosciamo in S , in sostanza dobbiamo costruire un piccolo vocabolario tipo il CASTIGLIONI-MARIOTTI. Vediamo di costruirlo questo vocabolario!!!

La regola è ferrea, si possono costruire tanti mondi paralleli, questa volta supporremo che i nuovi assi siano paralleli a quelli del nostro mondo. Esistono persone stravaganti che oltre a traslare gli assi potrebbero anche ruotarli e quindi avremmo un altro mondo. Noi voliamo un mondo solo traslato.

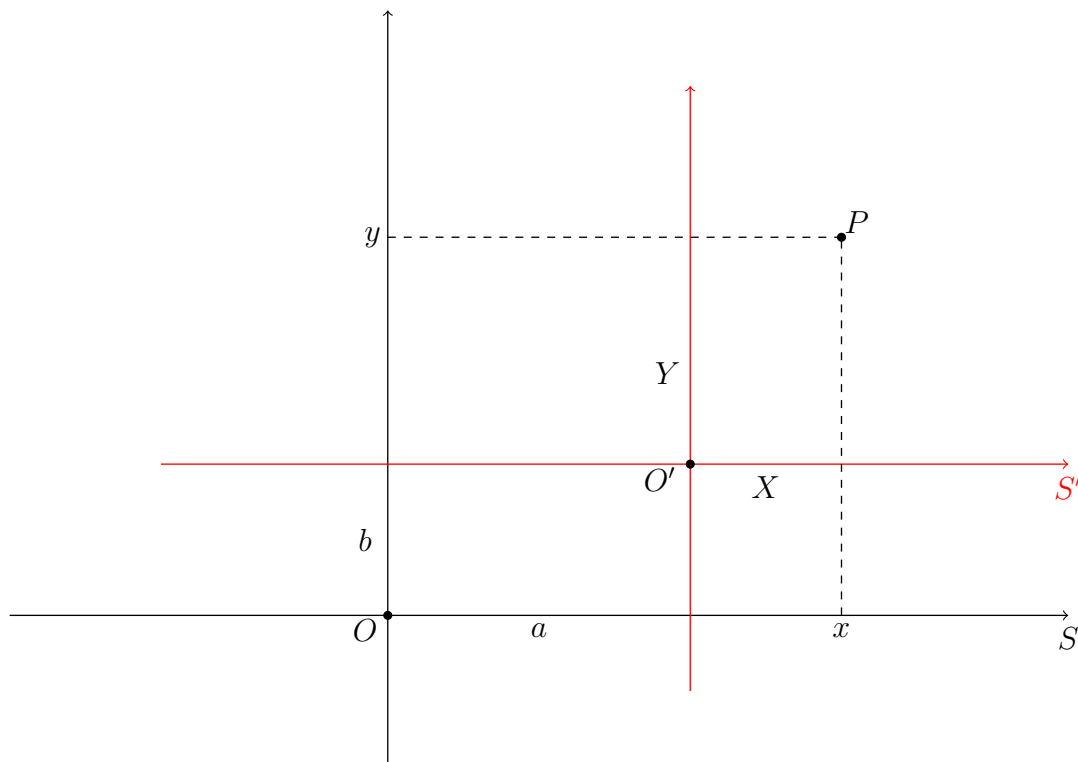


Figura 1: Riferimenti S e S'

Alla luce del disegno fatto, indichiamo con O' l'origine del nuovo sistema di riferimento S' siano (a, b) le coordinate di O' rispetto a S e quindi $O' \equiv (a, b)$. Il punto P ha coordinate (x, y)

rispetto al vecchio sistema di riferimento S e ha coordinate (X, Y) rispetto al nuovo sistema di riferimento S' . Non ci sono dubbi dal disegno che valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x = a + X \\ y = b + Y \end{cases} \quad (\text{Relazione cambiamento di riferimento})$$

Quello in alto è il nostro vocabolario, il vocabolario lo riscriviamo in una forma equivalente ma che risulta più comodo da leggere.

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases} \quad (1)$$

Vediamo come si applicano le formule precedenti.

Esempio 1 *L'origine del nuovo riferimento ha coordinate $O' \equiv (-3, 2)$, sappiamo che le coordinate di un punto rispetto al vecchio sono $P \equiv (6, 2)$. Quali saranno le coordinate del punto P nel nuovo riferimento?*

Svolgimento

Bisogna solo applicare le formule precedenti:

$$\begin{cases} X = 6 - (-3) = 9 \\ Y = 2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Dunque il punto P nel nuovo riferimento S' avrà coordinate $P \equiv (9, 0)$

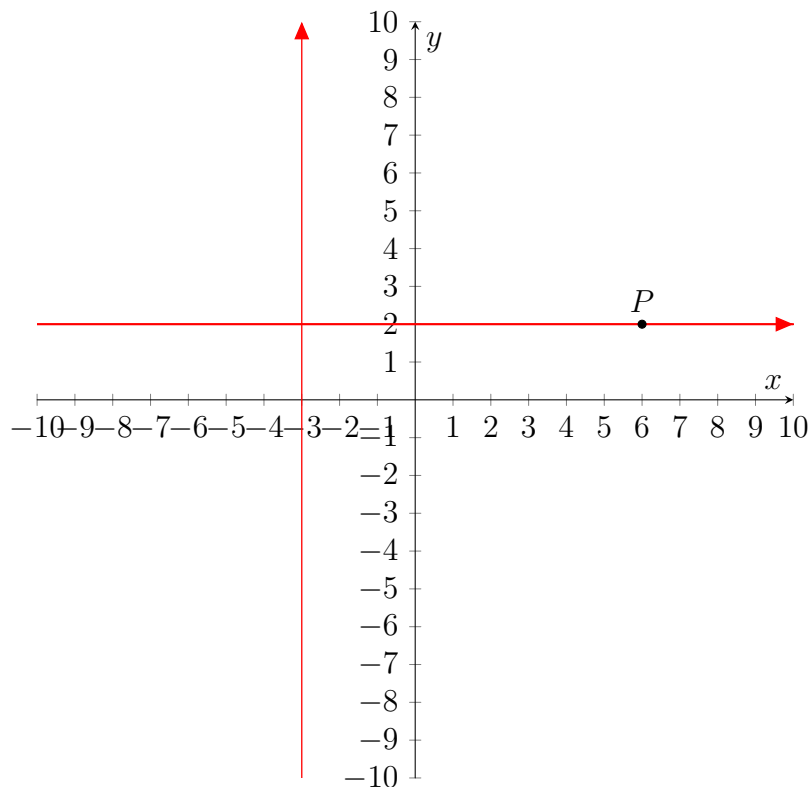


Figura 2: Riferimenti S e S'

Notate come davvero il punto P nel vecchio riferimento S ha coordinate $P \equiv (6, 2)$ e nel nuovo riferimento in rosso S' le sue coordinate siano $P \equiv (9, 0)$.

Esercizio 1 *In un riferimento cartesiano le coordinate di un punto sono $P \equiv (4, -3)$, l'origine del nuovo riferimento ha coordinate $O' \equiv (3, 2)$. Determinare le coordinate del punto P nel nuovo riferimento. Se una retta r nel vecchio riferimento ha equazione $2x - y + 3 = 0$, quale sarà l'equazione della retta nel nuovo riferimento?*

Osservazione 1 A lezione abbiamo detto che l'equazione $y = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ rappresenta una parabola, con $a > 0$ la parabola è convessa o ha la concavità verso l'alto; se invece $a < 0$ la parabola è concava o ha la concavità verso il basso.

Gli elementi legati ad una parabola γ sono il *FUOCO* F , il *VERTICE* V , l'*ASSE DI SIMMETRIA* a e la *DIRETTRICE* $\bar{d}$. Se siamo in presenza di un sistema di riferimento cartesiano, allora gli elementi precedenti legati all'equazione $y = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ sono individuati dalle seguenti relazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} V \equiv \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right) \\ F \equiv \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a} \right) \\ a : x = -\frac{b}{2a} \\ \bar{d} : y = -\frac{1+\Delta}{4a} \end{array} \right.$$

Le relazioni scritte in precedenza si intuisce che sono collegate alla relazione $y = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$, dove con Δ indichiamo il discriminante del trinomio $ax^2 + bx + c$ e quindi $\Delta = b^2 - 4ac$.

Esempio 2 Assegnata la parabola di equazione $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2$, in primo luogo bisogna determinare gli elementi notevoli della parabola e successivamente rappresentarla nel piano cartesiano.

Svolgimento

La prima cosa da fare è determinare il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac \implies \Delta = 1 + 4 = 5 \implies \Delta = 5$, successivamente determiniamo $-\frac{b}{2a} = 1$. A questo punto possiamo scrivere:

$$\left\{ \begin{array}{l} V \equiv \left(1, \frac{5}{2} \right) \\ F \equiv (1, 2) \\ a : x = 1 \\ \bar{d} : y = 3 \end{array} \right.$$

Per quanto riguarda la rappresentazione si parte rappresentando nel piano cartesiano in primo luogo il vertice $V \equiv \left(1, \frac{5}{2} \right)$. Il passo successivo è in genere trovare l'intersezione con l'asse della y , il che equivale a porre $x = 0$ nell'equazione della parabola e si trova $A \equiv (0, 2)$. Noi sappiamo che la parabola è simmetrica rispetto all'asse $x = \frac{5}{2}$, quindi l'altro punto da rappresentare è B che il simmetrico di $A \equiv (0, 2)$ rispetto a $(1, 2)$. Tenendo conto delle formule di simmetria centrale si trova $B \equiv (2, 2)$. Per migliorare la rappresentazione possiamo determinare in questo caso le intersezioni con l'asse delle ascisse. Si trovano così gli ulteriori punti $H \equiv (1 - \sqrt{5}, 0)$ e $K \equiv (1 + \sqrt{5}, 0)$

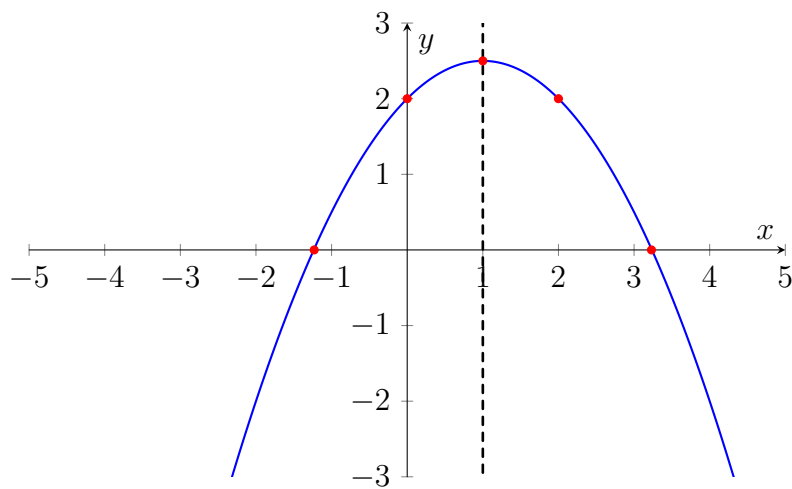


Figura 3: Il grafico della parabola $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2$

Ora scriveremo l'equazione di una parabola che avrà il fuoco sull'asse delle ordinate, direttrice parallela all'asse delle ascisse e faremo in modo che il vertice possa essere proprio l'origine del sistema di riferimento. Una tale situazione si crea prendendo $F \equiv \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e come direttrice la retta $y = -\frac{1}{4a}$. Impostiamo la relazione per determinare i punti $P \equiv (x, y)$ della parabola:

$$\text{dist.}(P, F) = \text{dist.}(P, d)$$

$$\sqrt{\left(x - 0\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4a}\right)^2} = \left|y + \frac{1}{4a}\right|$$

Elevando al quadrato entrambi i membri e sviluppando i calcoli si ottiene:

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2a}y + \frac{1}{16a^2} = y^2 + \frac{1}{2a}y + \frac{1}{16a^2}$$

$$\frac{1}{a}y = x^2$$

e finalmente

$$y = ax^2$$

Possiamo concludere che ogni volta che siamo in presenza di un'equazione del tipo $y = ax^2$ con $a \neq 0$, essa rappresenta l'equazione di una parabola che individua i seguenti le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} V \equiv (0, 0) \\ F \equiv \left(0, \frac{1}{4a}\right) \\ a : x = 0 \\ d : y = -\frac{1}{4a} \end{cases}$$