

Area di un triangolo

Liceo Assteas -Buccino-

F. Fernicola

27 Ottobre 2025

Siano assegnati tre punti distinti A , B e C , se essi non sono allineati individuano un triangolo. Il nostro obiettivo è fornire una formula che ci permetta di calcolare l'area del triangolo ricorrendo esclusivamente alle coordinate dei tre punti. Indichiamo con $A \equiv (x_1, y_1)$, $B \equiv (x_2, y_2)$ e $C \equiv (x_3, y_3)$ le coordinate dei tre vertici.

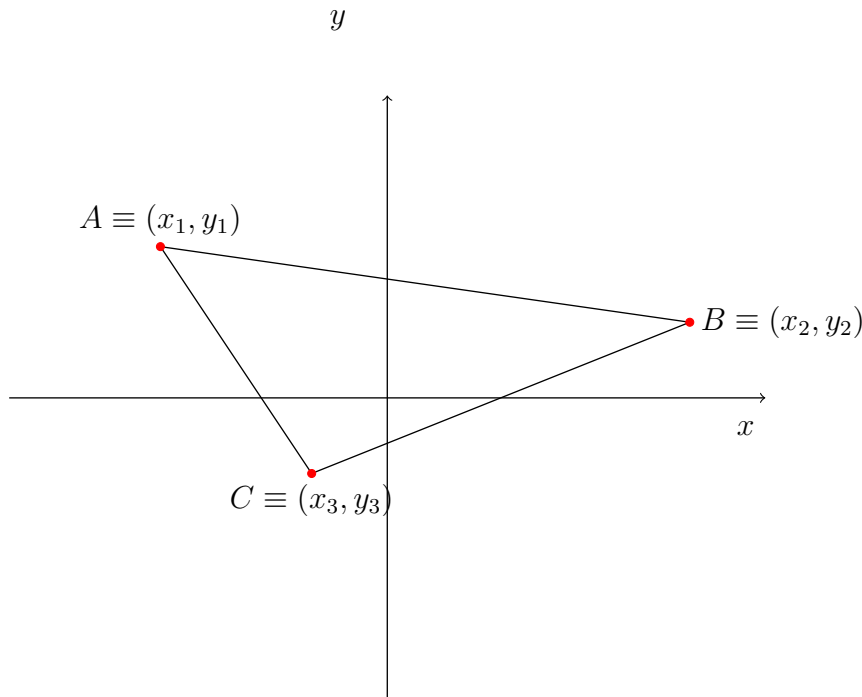


Figura 1: Area di un triangolo

Intanto ci chiediamo come facciamo a sapere se assegnate le coordinate di tre vertici i punti sono o non sono allineati. Dobbiamo controllare il determinante della seguente matrice di ordine 2 (la nozione di determinante utilizzata nella regola di Cramer):

$$|M| = \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix}$$

Se $|M| \neq 0 \implies$ i tre punti non sono allineati e individuano un triangolo.

Se $|M| = 0 \implies$ i tre punti sono allineati e non individuano un triangolo.

Intanto indichiamo con $|D| = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$. L'area del triangolo sarà: $\mathcal{A} = \frac{1}{2} |\det(D)|$

Esempio 1 Verificare che i punti $A \equiv (-2, 1)$, $B \equiv (3, 4)$ e $C \equiv (4, -1)$ non sono allineati e determinare l'area del triangolo da essi individuati.

Soluzione

$|M| = \begin{vmatrix} 4+2 & -1-1 \\ 3+2 & 4-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 18 + 10 = 28 \neq 0$, possiamo concludere che i tre punti individuano un triangolo.

$$|D| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8 + 4 - 3 - 16 - 3 - 2 = -28, \text{ allora possiamo concludere:}$$

$$\mathcal{A} = \left| \frac{1}{2} \cdot (-28) \right| = |-14| = 14 \implies \mathcal{A} = 14.$$

Esempio 2 Verificare che i punti $A \equiv (4, 0)$, $B \equiv (2, 3)$ e $C \equiv (0, -2)$ non sono allineati e determinare l'area del triangolo da essi individuati.

Soluzione

$|M| = \begin{vmatrix} 0-4 & -2-0 \\ 2-4 & 3-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -12 - 4 = -16 \neq 0$, possiamo concludere che i tre punti individuano un triangolo.

$$|D| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 0 - 4 - 0 - 0 + 8 = 16, \text{ allora possiamo concludere:}$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} |\det(16)| = 8 \implies \mathcal{A} = 8.$$

Esercizio 1 Verificare che i punti $A \equiv (-3, 2)$, $B \equiv (-1, 4)$ e $C \equiv (2, 3)$ non sono allineati e determinare l'area del triangolo da essi individuati.

Osservazione 1 Voglio fare vedere come l'esercizio svolto nell'**Esempio 1** può essere svolto anche in modo "tradizionale". Non è difficile trovare la retta per AB , essa ha equazione $r : 3x - 5y + 11 = 0$, sappiamo anche che $d(A, B) = \sqrt{34}$.

Non è difficile calcolare $d(C, r) = \frac{|12 + 5 + 11|}{\sqrt{34}} = \frac{28}{\sqrt{34}} \implies \mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{34} \cdot \frac{28}{\sqrt{34}} = 14$, come si vede lo stesso risultato.