Proprietà delle potenze e criteri di divisibilità

Liceo Assteas -Buccino, Classe 1D-

F. Fernicola 29 Settembre 2026

Definizione 1. *Se $a \in \mathbb{N}^*$ e $n \geq 1$ l'espressione a^n si chiama* ***potenza****. La quantità a si dice* base *e n si dice* esponente*; con il simbolo a^n si indica il prodotto di n fattori tutti uguali ad a.*

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots\ldots \cdot a}_{n \text{ volte}}.$$

(i) $a^1 = a$ con $a \in \mathbb{N}$

(ii) Se $a \in \mathbb{N}^*$, allora $a^0 = 1$.

(iii) $0^n = 0 \qquad \forall n \geq 1$

(iv) 0^0 non ha significato.

Proprietà delle potenze

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- $a^n : a^m = a^{n-m}$ con $n \geq m$
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m} = (a^m)^n$
- $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- $a^n : b^n = (a : b)^n$

Esempio 1. *Riportiamo alcuni esempi di come si applicano le cinque proprietà:*

- $3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5 = 243$
- $5^5 : 5^2 = 5^{5-2} = 5^3 = 125$
- $(2^3)^2 = 2^6 = 64$
- $2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3 = 6^3 = 216$
- $10^5 : 5^5 = (10 : 5)^5 = 2^5 = 32$

Multipli e divisori in $(\mathbb{N}, \cdot)$

Definizione 2. *Un a numero $a \in \mathbb{N}$ si dice multiplo di $b \in \mathbb{N}^*$ se accade che esiste $c \in \mathbb{N}$ tale che $a = b \cdot c$. In questo caso si dice anche che b è un divisore di a, osserviamo che anche c è un divisore di a.*

Evidente che 18 è multiplo di 3, in questo caso esiste $6 \in \mathbb{N}$ con $18 = 3 \cdot 6$; invece 14 non è multiplo di 6!

Quando scriviamo che $a = b \cdot c$, possiamo concludere che a è multiplo sia di b che di c.

$M_1 = M(1) = \{0, 1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}$

$M_2 = M(2) = \{0, 2, 4, 6, ...\}$

$M_3 = M(3) = \{0, 3, 6, 9, ...\}$

$\dots$

$M_k = M(k) = \{0, k, 2k, 3k, ...\}$

Definizione 3. *Un numero che è multiplo di 2 si dice pari. Un numero che è non multiplo di 2 si dice dispari.*

Proposizione 4. *Se a divide b e b divide c, allora a divide c.*

Dimostrazione. Dire che a divide b è la stessa cosa dire che b è multiplo di a e quindi per definizione esiste h con $b = a \cdot h$. Allo stesso modo dire che b divide c è la stessa cosa dire che c è multiplo di b e quindi per definizione esiste k con $c = b \cdot k$.

Sappiamo dalle ultime relazioni:

$$b = a \cdot h \qquad \text{e} \qquad c = b \cdot k$$

Dalle ultime due relazioni si deduce che $c = b \cdot k = (a \cdot h) \cdot k \Longrightarrow c = a \cdot (hk)$.

L'ultima relazione scritta ci dice per definizione che a divide c e la dimostrazione è completata. □

Dimostrare per esercizio la seguente:

Proposizione 5. *Se a divide b e a divide c con $b \geq c$, allora a divide $b - c$.*

Criteri di divisibilità

Criterio di divisibilità per 2

Un numero è divisibile per 2 se l'ultima cifra è pari.

Esempio 2. *Sono divisibili per 2 i seguenti numeri:* $24, 100, 32, 16, 28$.

Criterio di divisibilità per 3

Un numero è divisibile per 3 se la somma delle sue cifre è un multiplo di 3. Il numero 3726 è divisibile per 3 in quanto $3 + 7 + 2 + 6 = 18$ che risulta essere multiplo di 3.

Esempio 3. *Sono divisibili per* 3 *i seguenti numeri:* $234, 1545, 57$.

Criterio di divisibilità per 5

Un numero è divisibile per 5 se l'ultima cifra è 0 o 5. I numeri 450 e 775 sono divisibili per 5.

Esempio 4. *Sono divisibili per* 5 *i seguenti numeri:* $350, 185, 1445$.

Criterio di divisibilità per 7

Un numero è divisibile per 7 se la differenza tra il numero ottenuto escludendo l'ultima cifra e il doppio dell'ultima cifra è multiplo di 7 e tale procedimento si può iterare. Il numero 1645 è divisibile per 7 se il numero $164 - 2 \cdot 5 = 154$ è multiplo di 7, iterando il procedimento $15 - 2 \cdot 4 = 7$ si ottiene così un multiplo di 7 e il numero di partenza 1645 è divisibile per 7. Il numero 256158 è divisibile per 7 se il numero $25615 - 2 \cdot 8 = 25599$ è multiplo di 7, iterando il procedimento $2559 - 2 \cdot 9 = 2541$, iterando il procedimento $254 - 2 \cdot 1 = 252$, iterando il procedimento $25 - 2 \cdot 2 = 21$ è multiplo di 7 e il numero di partenza 256158 è divisibile per 7.

Esercizio 1. *Verificare che sono divisibili per* 7 *i seguenti numeri:* $3836, 37023, 2933, 315$.

Criterio di divisibilità per 11

Un numero è divisibile per 11 se la differenza, a partire da destra, tra la somma delle cifre che occupano la posizione dispari e la somma delle cifre che occupano la posizione

pari dà come risultato un multiplo di 11. Il numero 4950 è divisibile per 11 in quanto (0+9)-(5+4)=0 che è divisibile per 11. Il numero 1384801 è divisibile per 11 in quanto $(1+8+8+1)-(0+4+3)=18-7=11$. Il numero 4950 è divisibile per 11 in quanto $(0+9)-(5+4)=0$ che è divisibile per 11. Il numero 10998372 è divisibile per che è divisibile per 11 in quanto $(2+3+9+0)-(7+8+9+1)=14-25=-11$, tale numero a meno del segno è multiplo 11.

Esercizio 2. *Verificare che sono divisibili per per* 11 *i seguenti numeri:* $504801, 6424, 284834$.

Criterio di divisibilità per 13

Un numero è divisibile per 13 se la somma tra il numero ottenuto escludendo l'ultima cifra e il quadruplo dell'ultima cifra è multiplo di 13. Il numero 5876 è divisibile per 13 se il numero $587+4\cdot 6=611$ è multiplo di 13, iterando il procedimento $61+4\cdot 1=65$, iterando il procedimento $6+4\cdot 5=26$ si ottiene un multiplo di 13 e il numero di partenza 5876 è divisibile per 13. Il numero 111033 è divisibile per 13 se il numero $11103+4\cdot 3=11115$ è multiplo di 13, iterando il procedimento $1111+4\cdot 5=1131$, iterando il procedimento $113+4\cdot 1=117$, iterando il procedimento $11+4\cdot 7=39$ è multiplo di 13 e il numero di partenza 111033 è divisibile per 13 .

Esercizio 3. *Verificare che sono divisibili per* 13 *i seguenti numeri:* $585, 5954, 1248, 163592$.