

Panoramica sugli insiemi numerici

Liceo Assteas -Buccino, Classe 1D-

F. Fernicola

15 Settembre 2026

"Dio ha creato i numeri naturali, tutto il resto è opera dell'uomo"

Leopold Kronecker (1823-1891)

Il primo insieme numerico che l'uomo ha iniziato a manipolare è stato senza nessun dubbio l'insieme dei **NUMERI NATURALI**. Dunque i numeri naturali rivestono un ruolo importante e sono il punto di partenza per le successive costruzioni degli altri insiemi numerici. L'insieme dei numeri naturali si indica con il simbolo $\mathbb{N}$, una sua rappresentazione tabulare è la seguente:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Per chiarire alcuni concetti e prendere confidenza con gli insiemi numerici, faremo una breve panoramica su di essi e giustificheremo la loro costruzione a partire da problemi pratici.

Se consideriamo l'equazione:

$$x + 3 = 0$$

e ci chiediamo se esiste un numero in $\alpha \in \mathbb{N}$ che verifica l'equazione precedente a malincuore dobbiamo ammettere che non siamo capaci di soddisfare una tale richiesta. Non ci dobbiamo dichiarare per vinti, l'idea è di costruire un insieme numerico che colma la lacuna precedente e a noi ritorna il sorriso, stiamo parlando dell'insieme dei **NUMERI INTERI** e li indicheremo con il simbolo $\mathbb{Z}$. Una rappresentazione tabulare di tale insieme è la seguente:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

L'equazione precedente $x + 3 = 0$ in $\mathbb{Z}$ ammette la soluzione $\alpha = -3$ in quanto sappiamo che $-3 + 3 = 0$ e $-3 \in \mathbb{Z}$.

Anche l'insieme $\mathbb{Z}$ però presenta dei limiti perché se consideriamo l'equazione:

$$2x - 1 = 0$$

e ci chiediamo se esiste un numero in $\alpha \in \mathbb{Z}$ che verifica l'equazione precedente facilmente ci si convince che non è possibile. Ecco giustificata la costruzione dell'insieme dei **NUMERI RAZIONALI** e li indicheremo con il simbolo $\mathbb{Q}$. Una rappresentazione tabulare "molto approssimativa" di tale insieme è la seguente (ovvio che non è possibile rappresentarli tutti!):

$$\mathbb{Q} = \{\dots, -\frac{3}{2}, \dots, -\frac{1}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{2}{3}, \dots, 3, \dots, \frac{11}{2}, \dots\}.$$

L'equazione precedente $2x - 1 = 0$ in $\mathbb{Q}$ ammette la soluzione $\alpha = \frac{1}{2}$ in quanto sappiamo che $2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 0$ e $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$.

Con i numeri razionali abbiamo colmato ogni vuoto? Non proprio perché se consideriamo l'equazione:

$$x^2 - 2 = 0$$

e ci chiediamo se esiste un numero in $\mathbb{Q}$ che verifica l'equazione precedente si dimostra (la dimostrazione la faremo!) che non esistono numeri razionali che verificano la relazione precedente. Per colmare questa mancanza si costruisce l'insieme dei **NUMERI REALI** e li indicheremo con il simbolo $\mathbb{R}$. Una rappresentazione tabulare "molto approssimativa" di tale insieme è la seguente (ovvio che non è possibile rappresentarli tutti!):

$$\mathbb{R} = \{..., -\sqrt{15}..., -\frac{5}{2}, ..., -\frac{3}{2}, ..., -\sqrt{2}, ..., 0, ..., \frac{1}{3}, ..., \sqrt{2}, ..., 5, ..., \frac{16}{3}, ..., \}.$$

L'equazione precedente $x^2 - 2 = 0$ in $\mathbb{R}$ ammette le due soluzioni $\alpha_1 = -\sqrt{2}$ e $\alpha_2 = \sqrt{2}$ in quanto sappiamo anche dalle scuole medie che:

$$(\sqrt{2})^2 - 2 = 2 - 2 = 0 \text{ e } (-\sqrt{2})^2 - 2 = 2 - 2 = 0 \text{ con } -\sqrt{2}, \sqrt{2} \in \mathbb{R}.$$

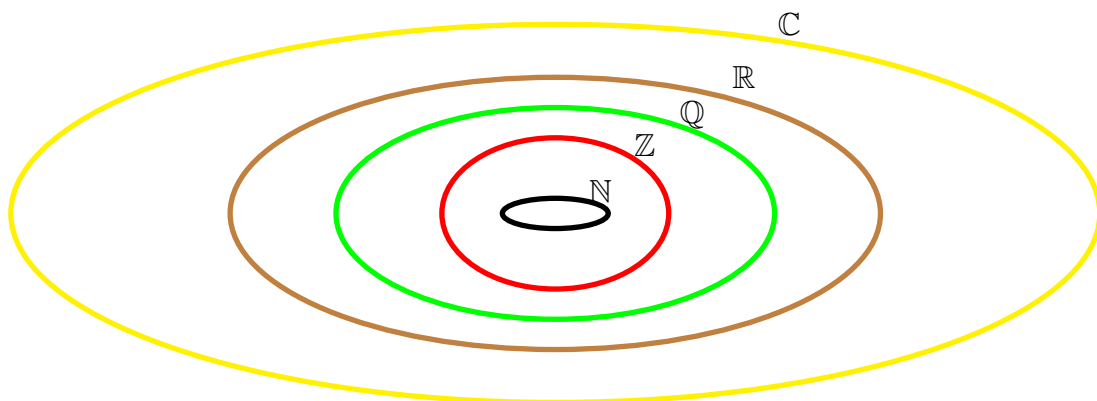
Con i numeri reali ci possiamo fermare? Solo l'ultimo step e poi davvero possiamo ritenerci soddisfatti. Se consideriamo l'equazione:

$$x^2 + 1 = 0$$

e ci chiediamo se esiste un numero in $\mathbb{R}$ che verifica l'equazione precedente non è difficile convincersi che il tentativo è destinato al fallimento. Per colmare questa mancanza si costruisce l'insieme dei **NUMERI COMPLESSI** e li indicheremo con il simbolo $\mathbb{C}$. All'interno di $\mathbb{C}$ esiste il numero complesso i (si chiama unità immaginaria) con la proprietà che $i^2 = -1$. In tal modo l'equazione precedente è verificata da i e anche da $-i$. Infatti si ha:

$$i^2 + 1 = -1 + 1 = 0 \text{ e } (-i)^2 + 1 = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0 \text{ con } -i, i \in \mathbb{C}.$$

Per i numeri complessi $\mathbb{C}$ non riporto nessuna rappresentazione tabulare per una tale rappresentazione potrebbe indurvi a pensare che i numeri complessi possano essere in un certo ordine, in realtà se farete degli studi superiori di matematica si capirà che i numeri complessi non possono essere ordinati, in altre parole tra due numeri complessi non è possibile stabilire chi dei due è più grande, cosa che non facciamo benissimo tra i numeri reali. Si dice che l'insieme dei numeri complessi è un insieme numerico *non ordinato*.



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$\subset$, si legge "contenuto".