

Nota sui numeri naturali

Liceo Assteas -Buccino, Classe 1D-

F. Fernicola

19 Settembre 2026

Alcuni simboli che si possono utilizzare in Algebra

Vediamone alcuni:

$\exists$ **Quantificatore esistenziale**, si legge *esiste almeno....., per qualche.....*

$\forall$ **Quantificatore universale**, si legge *per ogni....., qualunque sia.....*

$\in$ **Simbolo di appartenenza**, si legge *appartiene a....., sta in..*

$\exists!$ si legge *esiste ed è unico*

$\nexists$ si legge *non esiste*

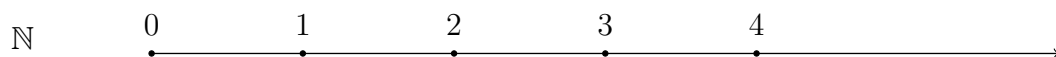
$|$ si legge *tale che* e in altri casi significa *divide*. A secondo del contesto utilizzato sarà ben chiaro e non si creerà confusione.

L'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$

Il primo insieme numerico che l'uomo ha iniziato a manipolare è stato senza nessun dubbio l'insieme dei **NUMERI NATURALI**. Dunque i numeri naturali rivestono un ruolo importante e sono il punto di partenza per le successive costruzioni degli altri insiemi numerici. L'insieme dei numeri naturali si indica con il simbolo $\mathbb{N}$, una sua rappresentazione tabulare è la seguente:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Se "guardiamo più da vicino" in questo insieme numerico è definita una relazione di ordine, i numeri naturali $\mathbb{N}$ li possiamo collocare su una retta orientata nel seguente modo:



Nell'insieme dei numeri naturali dunque esiste una relazione di ordine totale, questo vuol dire che presi due numeri naturali distinti arbitrari m e n , di sicuro vale una e una sola delle seguenti relazioni:

$$m < n \qquad \text{oppure} \qquad m > n$$

Ordine tra i numeri naturali $\mathbb{N}$

Quando parliamo di numeri naturali $\mathbb{N}$ possiamo dire che il successivo di n è il numero $n + 1$ e il precedente di n è il numero naturale $n - 1$. Tutti i numeri naturali hanno un successivo, non è vero che tutti i numeri naturali hanno un precedente. Sapete dire chi non possiede un precedente?

La scrittura $a < b$ si legge a minore di b oppure b maggiore di a .

La scrittura $a \leq b$ si legge a minore o uguale di b oppure b maggiore o uguale di a .

La scrittura $a > b$ si legge a maggiore di b oppure b minore di a .

La scrittura $a \geq b$ si legge a maggiore o uguale di b oppure b minore o uguale di a .

Esercizio 1 *Provate a scrivere con il linguaggio e i simboli dell'algebra le seguenti espressioni (La soluzione si trova alla fine della nota):*

- a) *I numeri interi strettamente compresi tra 0 e 4.*
- b) *I numeri naturali maggiori di 7 e minori o uguali a 10.*
- c) *I numeri razionali minori di 4.*
- d) *I numeri naturali maggiori o uguali di -3 .*
- e) *I numeri interi minori o uguale di -1 .*
- f) *I numeri razionali compresi tra -2 e 1.*
- g) *I numeri interi maggiori o uguali a 1 e minori di 3.*
- h) *I numeri naturali maggiori di -5 .*

Proprietà dell'insieme $\mathbb{N}$

- i) Considerato un qualsiasi numero naturale n , esiste sempre un numero naturale più grande, ad esempio $n + 1$. Questa proprietà non solo ci dice che $\mathbb{N}$ non è dotato di massimo, allo stesso tempo possiamo dire che esso è infinito.
- ii) L'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ è dotato di minimo, esso è lo zero (in simboli 0).
- iii) L'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ è discreto, questo vuol dire che è possibile scegliere almeno una coppia di numeri naturali e tra di essi non esiste nessun numero naturale. Ad esempio se noi consideriamo i numeri 5 e 6 sappiamo che tra di essi non ci sono altri numeri naturali. In altri termini possiamo dire che vale la seguente relazione:

$$\mathbb{N} \text{ è discreto perché } \exists a, b \in \mathbb{N} \text{ e } \nexists c \in \mathbb{N} \mid a < c < b$$

Osserviamo che per ogni coppia di numeri del tipo $(n, n + 1)$ con $n \geq 0$ vale la proprietà precedente!!!

Sapete dire chi è il successivo del numero naturale $n + 2$?

Sapete dire chi il precedente del numero naturale $n + 6$?

Per quali valori di n il numero $n - 4$ è un numero naturale?

Operazioni nell'insieme $\mathbb{N}$

L'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ visto solamente come insieme numerico non avrebbe un grosso significato, l'importanza di $\mathbb{N}$ nasce non appena in esso si introducono delle operazioni. Le operazioni che noi conosciamo sono le seguenti:

- i) Addizione il cui simbolo è $+$
- ii) Moltiplicazione il cui simbolo è $\cdot$
- iii) Sottrazione il cui simbolo è $-$
- iv) Divisione il cui simbolo è $:$

Definizione 1 Si chiama struttura algebrica un insieme con una o più operazioni. La più semplice struttura algebrica è un insieme con una sola operazione e si dice **gruppoide**. Se qualcuno ci chiede cos'è un gruppoide, noi dobbiamo rispondere che è un insieme con una sola operazione. Sono esempi di gruppidi le seguenti strutture algebriche: $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{N}, -)$, $(\mathbb{N}, :)$. Per contro non è un gruppoide la struttura algebrica $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, non lo è perché è una struttura algebrica con due operazioni.

L'operazione in un insieme riveste una ruolo importante perchè lo stesso insieme potrebbe avere delle proprietà che non ha con un'altra operazione. Vi faccio subito un esempio per chiarire ogni dubbio.

Noi sappiamo che $(\mathbb{N}, +)$ e $(\mathbb{N}, :)$ sono gruppidi (essi sono insiemi ciascuno dotato di una sola operazione). Se dovessi fare una scelta tra le due strutture non ci sono dubbi che prenderei $(\mathbb{N}, +)$, il motivo è presto giustificato.

Sapete che in $(\mathbb{N}, +)$ vale la relazione $5 + (3 + 2) = (5 + 3) + 2$ e in generale sappiamo che $a + (b + c) = (a + b) + c$. Possiamo riassumere che l'addizione $+$ è un'operazione che gode della proprietà associativa.

Prendiamo ora la struttura algebrica $(\mathbb{N}, :)$ in questo caso la proprietà associativa della divisione non vale perché sapete benissimo che $8 : (4 : 2)$ non è uguale a $(8 : 4) : 2$, infatti nel primo calcolo otteniamo $8 : (4 : 2) = 8 : 2 = 4$ e nel secondo calcolo otteniamo $(8 : 4) : 2 = 2 : 2 = 1$. Con questa osservazione possiamo dire che la struttura algebrica $(\mathbb{N}, +)$ è "più ricca" della struttura algebrica $(\mathbb{N}, :)$; nel primo caso l'operazione $+$ gode della proprietà associativa (brutalmente diciamo che è possibile spostare le parentesi). Nel secondo caso l'operazione $:$ non gode della proprietà associativa (brutalmente diciamo che non è possibile spostare le parentesi).

Un gruppoide con l'operazione associativa si dice un **semigrupp**. Sono esempi di semigrupp le strutture algebriche $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$; non è un semigrupp il gruppoide $(\mathbb{N}, :)$ perchè come abbiamo visto in alto l'operazione $:$ non è associativa.

Prendiamo in considerazione le quattro operazioni: $+$, $\cdot$, $-$, $:$

Se $a, b \in \mathbb{N}$, allora la quantità $a + b$ si dice somma, i termini a, b si dicono addendi.

Se $a, b \in \mathbb{N}$, allora la quantità $a \cdot b$ si dice prodotto, i termini a, b si dicono fattori.

Se $a, b \in \mathbb{N}$, allora la quantità $a - b$ si dice differenza, il termine a minuendo e il termine b sottraendo.

Se $a, b \in \mathbb{N}$, allora la quantità $a : b$ si dice quoziente, il termine a dividendo e il termine b divisore.

Le nozioni in alto menzionate possono essere racchiuse dal seguente schema:

Operazione	Simbolo	Risultato	a	b
Addizione	$+$	$a + b$ (Somma)	Addendo	Addendo
Moltiplicazione	$\cdot$	$a \cdot b$ (Prodotto)	Fattore	Fattore
Sottrazione	$-$	$a - b$ (Differenza)	Minuendo	Sottraendo
Divisione	$:$	$a : b$ (Quoziente)	Dividendo	Divisore

Operazioni non sempre definite

Abbiamo sempre rimarcato che le operazioni in una struttura algebrica hanno un ruolo importante, la loro importanza deriva dalle proprietà di cui esse godono. Non ci sono dubbi che $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{N}, -)$ e $(\mathbb{N}, :)$ sono tutte strutture algebriche, c'è una differenza tra $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$ e le altre due strutture $(\mathbb{N}, -)$, $(\mathbb{N}, :)$. Nelle prime due le operazioni sono **interne**, nelle ultime due strutture algebriche le operazioni **non sono interne**.

Addizione e moltiplicazione **sono interne** perchè $\forall a, b \in \mathbb{N} \quad a + b \in \mathbb{N}, a \cdot b \in \mathbb{N}$

Sottrazione **non è interna** perchè $\exists a, b \in \mathbb{N} \quad a - b \notin \mathbb{N}$ (ad esempio $a = 3$ e $b = 5$)

divisione **non è interna** perchè $\exists a, b \in \mathbb{N} \quad a : b \notin \mathbb{N}$ (ad esempio $a = 10$ e $b = 6$)

Proprietà delle operazioni in $(\mathbb{N}, +)$

Vediamo quali sono le proprietà che valgono nella struttura algebrica $(\mathbb{N}, +)$, le principali sono le seguenti:

- a) $\forall a, b, c \in \mathbb{N} \quad (a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{Proprietà associativa dell'addizione}$
- b) $\forall a, b \in \mathbb{N} \quad a + b = b + a \quad \text{Proprietà commutativa dell'addizione}$
- c) $\exists 0 \in \mathbb{N} \quad a + 0 = 0 + a = a \quad \text{Esistenza dell'elemento neutro rispetto all'addizione}$

Proprietà delle operazioni in $(\mathbb{N}, \cdot)$

Vediamo quali sono le proprietà che valgono nella struttura algebrica $(\mathbb{N}, \cdot)$, le principali sono le seguenti:

- d) $\forall a, b, c \in \mathbb{N} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \text{Proprietà associativa della moltiplicazione}$
- e) $\forall a, b \in \mathbb{N} \quad a \cdot b = b \cdot a \quad \text{Proprietà commutativa della moltiplicazione}$
- f) $\exists 1 \in \mathbb{N} \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \text{Esistenza dell'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione}$

Proprietà delle operazioni in $(\mathbb{N}, +, \cdot)$

Mettiamo in evidenza una proprietà che "lega" le due operazioni nella struttura algebrica $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, essa è la seguente:

- g) $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \end{cases}$$

Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione

Proprietà delle operazioni in $(\mathbb{N}, +, \cdot, -, :)$

In questa sezione vogliamo menzionare altre proprietà che possono essere utilizzate nello svolgimento degli esercizi. Osserviamo in primo luogo che la divisione è distributiva a destra rispetto all'addizione e alla sottrazione, in altre parole vale la seguente relazione:

$\forall a, b, c \in \mathbb{N} \quad (a \pm b) : c = a : c \pm b : c \quad \text{Proprietà distributiva a destra della divisione rispetto all'addizione o alla sottrazione.}$

$\forall a, b, c \in \mathbb{N} \quad a - b = (a + c) - (b + c)$ *Proprietà invariante della sottrazione.*

$\forall a, b, c \in \mathbb{N} \quad a - b = (a - c) - (b - c)$ *Proprietà invariante della sottrazione.*

$\forall a, b, c \in \mathbb{N} \quad a : b = (a : c) : (b : c)$ *Proprietà invariante della divisione.*

$\forall a, b, c \in \mathbb{N} \quad a : b = (a \cdot c) : (b \cdot c)$ *Proprietà invariante della divisione.*

osservazione I numeri naturali a, b, c devono essere scelti in modo tale che le operazioni siano interne.

Legge di annullamento del prodotto e algoritmo euclideo

Nel semigruppato $(\mathbb{N}, \cdot)$, vale la seguente proprietà:

$a \cdot b = 0 \iff a = 0 \vee b = 0 \longrightarrow$ **Legge di annullamento del prodotto**

E' vera un' ulteriore proprietà:

$\forall a, b \in \mathbb{N}$ con $b \neq 0$ esistono e sono unici $q, r \in \mathbb{N}$ per i quali vale la seguente relazione:

$a = b \cdot q + r$ con $0 \leq r < b \longrightarrow$ **Algoritmo divisione euclidea**

Vogliamo concludere questa sezione con una considerazione importante e che ritornerà spesso nel corso degli studi di algebra. Sappiamo che $24 : 3 = 8$ perchè $8 \cdot 3 = 24$, così pure sarà $36 : 4 = 9$ perchè $9 \cdot 4 = 36$. Sulla base del ragionamento precedente qual è il risultato dell'operazione $0 : 5$? Non ci sono dubbi $0 : 5 = 0$ perchè $0 \cdot 5 = 0$.

Qual è il risultato dell'operazione $5 : 0$? Se riflettiamo un pochino dobbiamo concludere che non può essere un numero perchè se così fosse tale numero, diciamolo n , moltiplicato per 0 mi dovrebbe "resituire" 5 e questo non è possibile in virtù della **Legge di annullamento del prodotto**, infatti $n \cdot 0 = 0$. Allora ricordate che l'espressione $5 : 0$ è **impossibile**. In algebra la divisione per 0 è una scrittura priva di senso!

Qual è il risultato dell'operazione $0 : 0$? In questo caso siamo nella situazione che ogni numero n va bene e quindi siamo portati a dire che $0 : 0$ è un'espressione **indeterminata**. La morale della favola è che dividere per 0 non è consentito.