

APPROFONDIMENTI DI ALGEBRA

1) Che cos'è una struttura algebrica?

R) Una struttura algebrica è un insieme con una o più operazioni

2) Mi sai dare qualche esempio di struttura algebrica.

R) Sono esempi di strutture algebriche

$$(\mathbb{N}, +) ; (\mathbb{N}, \cdot) , (\mathbb{N}, +, \cdot)$$

$$(\mathbb{N}, -) ; (\mathbb{N}, :) ; (\mathbb{N}, \wedge)$$

$$\text{Ma anche } (\mathbb{Z}, +) ; (\mathbb{Z}, +, \cdot)$$

Con un pochino di fantasia si possono fare molti esempi di strutture algebriche.

3) La struttura algebrica $(\mathbb{N}, +)$ è dotata di elemento neutro?

R) Sì, esso è 0; infatti $a + 0 = a$ dove $a \in \mathbb{N}$

4) Qual è l'elemento neutro nella struttura algebrica $(\mathbb{N}, \cdot)$?

R) In questo caso $1 \in \mathbb{N}$ è l'elemento neutro in quanto $a \cdot 1 = a$ con $a \in \mathbb{N}$.

5) Come si scrive le proprietà associative dell'addizione?

R) In simboli scriviamo $a + (b + c) = (a + b) + c$

6) Come si scrive le proprietà associative della moltiplicazione?

R) In simboli scriviamo $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

7) Come si scrive la proprietà commutativa dell'addizione?

R) In simboli $a + b = b + a$

8) Come si scrive la proprietà commutativa della moltiplicazione?

R) In simboli scriviamo $a \cdot b = b \cdot a$

9) Nelle strutture algebriche $(N, \wedge)$ l'operazione $\wedge$ è l'elevamento a potenza questa operazione è commutativa?

R) L'operazione di elevamento a potenza $\wedge$ non è commutativa, in generale $a \wedge b \neq b \wedge a$ ovvero $a^b \neq b^a$

Possiamo constatarlo facendo un esempio:

$$5^2 \neq 2^5 \text{ infatti } 25 \neq 32.$$

10) Nella struttura algebrica $(N, +, \cdot)$ mi sai scrivere in simboli le proprietà distributive di $\cdot$ rispetto a $+$

R) In questo caso scriviamo:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

11) Nella struttura algebrica $(N, +, \cdot)$ vale le proprietà distributive di $+$ rispetto a $\cdot$.

R) No, non vale! Possiamo dire che in generale non è vero che

$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$$

Verifichiamo con un esempio

$$2 + (3 \cdot 2) \neq (2 + 3) \cdot (2 + 2)$$

$$2 + 6 \neq 5 \cdot 4$$

$$8 \neq 20$$